形式的KZ方程式の接続問題と多重対数関数の調和積 (多重ゼータ値の諸相)

大井, 周

数理解析研究所講究録
第 1813 巻 2012 年 73-88

形式的KZ方程式の接続問題と多重対数関数の調和積

早稲田大学理工学術院　大井 周 (Shu OI)†
Faculty of Science and Engineering
Waseda University

1　イントロダクション

本研究は早稲田大学理工学術院の上野 喜三雄教授との共同研究である.

我々の研究の目的は形式的 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式 (形式的 KZ 方程式) を代数解析, 微分方程式論の立場から研究することにある. 特に解の接続問題, 変換理論を代数的に取り扱う枠組みを構成したいと考えている.

形式的 KZ 方程式は $\mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ の点の配置のモジュライ空間上の微分方程式であり, 解の接続係数である Drinfel'd associator が多重ゼータ値の級数として表記される. Drinfel'd associator と多重ゼータ値に関しては数論幾何の分野で Deligne-寺杣 [DT], 古庄 [F], Brown [B] 等によりモチーフや数論的基本群の理論を用いて深く研究されているが, 我々は形式的 KZ 方程式を導入し, (コ) ホモロジー論によらずに Drinfel'd associator から導かれる多重ゼータ値の関係式を形式的 KZ 方程式の解の接続問題として解釈する.

本稿においては形式的 KZ 方程式, 特に 2 変数の場合の基本解の分解 (命題 6) を配置空間の幾何学と関連づけて説明する. 形式的 KZ 方程式の基本解を反復積分を用いて構成 (命題 5) すると, 解の分解は反復積分の積分路の選び方に対応する (命題 7) ことを示すことができる. またそれぞれの積分路上での反復積分は被積分形式 (被約バー代数) の分解 (命題 2) として記述できる.

一方, 被積分形式の分解は反復積分を通じて超対数関数と呼ぶ一連の関数の間の関数等式を誘導する (一般化された調和積関係式). 特に 2 変数の場合 (定理 3), これは多重対数関数の調和積 (極限として多重ゼータ値の調和積) を真に含むことが示される (定理 4). これにより多重対数関数の調和積を形式的 KZ 方程式の基本解の分解の比較, すなわち解の変換理論, 接続問題として捉えることができる.

本稿で述べる一般化された調和積関係式のうち多重対数関数の調和積に対応するのは非常に狭い一部分にすぎない. 多重ゼータ値の調和積を考えるにあたってはその部分のみを考えれば十分であるが, 微分方程式とその解としては多重対数関数からはみ出る超対数関数の部分やより多変数への一般化も重要な意味を持つ. 本稿では最後に 3 変数以上への一般化についても簡単に紹介する.

---

† shu_oi@toki.waseda.jp, 早稲田大学特定課題研究助成費 (課題番号 2010B-200).

2 形式的KZ方程式

$\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1_{\mathbf{C}}$ の n 点の配置空間

$$\mathbb{F}_n(\mathbf{P}^1) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbf{P}^1)^n \mid x_i \neq x_j \ \ (i \neq j)\},$$

ならびに $\mathbb{F}_n(\mathbf{P}^1)$ の基本群の降中心列から定まる Lie 環 (伊原 [I]) $\mathfrak{X}$ を考える. $\mathfrak{X}$ は x_i が x_j の周りを回る基本群の元に対応する形式元 X_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ を生成元とする自由 Lie 環 $\mathbf{C}\{X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ を無限小純組み紐関係式 (IPBR) で割った Lie 環

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{X}(\{X_{ij}\}_{1 \leq i,j \leq n}) := \mathbf{C}\{X_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \big/ (\mathrm{IPBR})$$

で, これを無限小純組み紐 Lie 環と呼ぶことにしよう. 無限小純組み紐関係式 (IPBR) は

$$\begin{cases} X_{ij} = X_{ji}, & X_{ii} = 0, \\ \sum_j X_{ij} = 0 \quad (\forall i), & [X_{ij}, X_{kl}] = 0 \quad (\{i,j\} \cap \{k,l\} = \emptyset). \end{cases} \tag{IPBR}$$

で与えられる. また, $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ で $\mathfrak{X}$ の普遍展開環を表し, その単位元を $\mathbf{I}$ とする. $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ には語の長さで次数が入り, それに関する完備化を $\widetilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{X})$ とする. $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ には自然に Hopf 代数の構造が入る[1].

$\mathbb{F}_n(\mathbf{P}^1)$ 上の $\mathfrak{X}$ 値全微分方程式 (接続)

$$dG = \Omega G, \qquad \Omega = \sum_{i<j} \omega_{ij} X_{ij}, \qquad \omega_{ij} = d\log(x_i - x_j) \tag{KZ}$$

を形式的 KZ 方程式と呼ぶ[2](Drinfel'd [D]). ここで, 1-形式 ω_{ij} の間には次の唯一の 2 次の非自明な関係式である Arnold 関係式 (Arnold [A]) が成り立つ.

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ij} = 0. \tag{AR}$$

(IPBR) と (AR) から, (KZ) は可積分で $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$-不変性を持ち, モジュライ空間[3]

$$\mathcal{M}_{0,n} = \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \backslash \mathbb{F}_n(\mathbf{P}^1)$$

上の方程式と見なす事ができ, 解は $\widetilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{X})$ に値を持つ $\mathcal{M}_{0,n}$ 上の関数となる. 位相的には $\mathbb{F}_n(\mathbf{P}^1) \approx \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) \times \mathcal{M}_{0,n}$, $\mathcal{M}_{0,n} \approx \mathbb{F}_{n-3}(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\})$ である. 特に $\mathcal{M}_{0,4} \approx \mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ となることに注意しておこう.

$\mathcal{M}_{0,n}$ に次の 2 種類の座標を導入する. 単体座標

$$y_i = \frac{x_i - x_{n-2}}{x_i - x_n} \cdot \frac{x_{n-1} - x_n}{x_{n-1} - x_{n-2}} \quad (1 \leq i \leq n-3)$$

[1] $x \in \mathfrak{X}$ に対し, 余積 $\Delta(x) = \mathbf{I} \otimes x + x \otimes \mathbf{I}$, 余単位 $\varepsilon(x) = 0$ (共に代数射), 対合射 $S(x) = -x$ (反代数射).

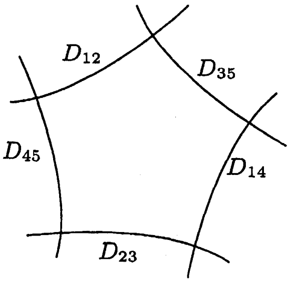
[2] この方程式は $\mathbb{F}_n(\mathbf{C})$ 上で定義されるものだが, (IPBR) の $\sum_j X_{ij} = 0$ より無限遠点でも正則となる.

[3] なお, 代数曲線論で通常モジュライ空間という場合はコンパクト化したものを考えるが, ここでは単純に $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$ の一次分数変換による対角的な作用で割った空間と考える.

は $(y_{n-2}, y_{n-1}, y_n) = (0,1,\infty)$, $\mathcal{M}_{0,n} \approx \mathbb{F}_{n-3}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})$ とみなした時の $\mathbb{F}_{n-3}(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\})$ における座標であり, 立方体座標

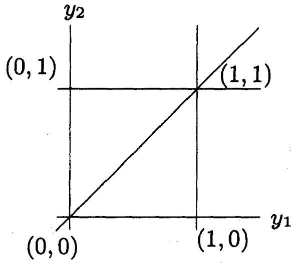
$$z_1 = y_1, z_2 = \frac{y_2}{y_1}, \cdots, z_{n-3} = \frac{y_{n-3}}{y_{n-4}} \iff y_i = z_1 \cdots z_i \quad (1 \le i \le n-3)$$

はそれを $(z_1, \dots, z_{n-3}) = (0, \dots, 0)$ が正規交叉になるようにブローアップしたものである. $\mathcal{M}_{0,5}$ の場合は次のようになっており, 立方体座標で $(1,1)$ もブローアップするともとの 5 角形になる.

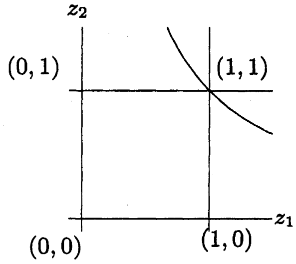


(対称な座標)

$D_{ij} = \{x_i = x_j\}$



単体座標



立方体座標

単体座標, 立方体座標の特異因子はぞれぞれ $\{y_i = 0,1,\infty\} \cup \{y_i = y_j \mid i \neq j\}$, $\{z_i = 0,1,\infty\} \cup \{z_i z_{i+1} \cdots z_j = 1 \mid 1 \le i < j \le n-3\}$ で与えられる.

3　1変数形式的 KZ 方程式と反復積分, 多重対数関数

$\mathcal{M}_{0,4}$ の立方体座標で, $Z_1 = X_{12}$, $Z_{11} = -X_{13}$ とすると, (KZ) は次の 1 変数形式的 KZ 方程式になる.

$$dG = \Omega G, \qquad \Omega = \zeta_1 Z_1 + \zeta_{11} Z_{11}, \qquad \zeta_1 = \frac{dz_1}{z_1}, \zeta_{11} = \frac{dz_1}{1 - z_1}. \tag{1KZ}$$

特異因子は $D = \{z_1 = 0,1,\infty\}$ である. (IPBR) は自明, すなわち無限小純組み紐 Lie 環 $\mathfrak{X} = \mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}\}$ は自由 Lie 環であり, (AR) は自明な関係式 $\zeta_1 \wedge \zeta_{11} = 0$ のみである.

この方程式の $z_1 = 0$ で正規化された基本解 ($\mathcal{L}(z_1) = \hat{\mathcal{L}}(z_1) z_1^{Z_1}$, $\hat{\mathcal{L}}(z_1)$ は $z_1 = 0$ で正則で $\hat{\mathcal{L}}(0) = \mathbf{I}$ となる $\widetilde{\mathcal{U}}(\mathfrak{X})$ 値関数, と表記できる解) が存在し, 次で与えられる.

$$\hat{\mathcal{L}}(z_1) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\mathcal{L}}_s(z_1), \tag{1KZSol}$$

$$\hat{\mathcal{L}}_s(z_1) = \sum_{k_1 + \cdots + k_r = s} \left(\int_0^{z_1} \zeta_1^{k_1 - 1} \zeta_{11} \cdots \zeta_1^{k_r - 1} \zeta_{11} \right) \times \mathrm{ad}(Z_1)^{k_1 - 1} \mu(Z_{11}) \cdots \mathrm{ad}(Z_1)^{k_r - 1} \mu(Z_{11})(\mathbf{I}).$$

ここで $F \in \mathcal{U}(\mathfrak{X})$ に対し $\mathrm{ad}(Z_1)(F) = [Z_1, F]$, $\mu(Z_{11})(F) = Z_{11} F$ である. また, この積分は反復積分

$$\int_0^{z_1} \zeta_\bullet w := \int_0^{z_1} \left(\zeta_\bullet \int_0^{z_1} w \right), \qquad \int_0^{z_1} \mathbf{1} := 1$$

(w は ζ_1, ζ_{11} で生成される自由シャッフル代数[4] $S(\zeta_1, \zeta_{11})$ の語) を意味する. この反復積分で定まる関数を (1 変数) 多重対数関数 (multiple polylogarithm, MPL) と呼び,

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1) := \int_0^{z_1} \zeta_1^{k_1-1}\zeta_{11}\cdots\zeta_1^{k_r-1}\zeta_{11} \tag{1MPL}$$

と表記する. 多重対数関数は $\mathcal{M}_{0,4} = \mathbf{P}_1 - \{0,1,\infty\}$ 上の多価解析関数だが, 原点の近傍で

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1) := \sum_{m_1>\cdots>m_r>0} \frac{z_1^{m_1}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}$$

($|z| < 1$ で絶対収束) と展開される分枝を持つ. ここで $k_1 > 1$ であればこの級数は $z_1 \to 1$ でも収束し, 多重ゼータ値 (multiple zeta value, MZV)

$$\zeta(k_1,\ldots,k_r) := \sum_{m_1>\cdots>m_r>0} \frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}} \tag{MZV}$$

を定める. 本稿ではまた多重対数関数, 多重ゼータ値を対応する反復積分の被積分形式である $S(\zeta_1, \zeta_{11})$ の ζ_{11} で終わる語を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}(\zeta_1^{k_1-1}\zeta_{11}\cdots\zeta_1^{k_r-1}\zeta_{11}; z_1) &= \mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1),\\ \zeta(\zeta_1^{k_1-1}\zeta_{11}\cdots\zeta_1^{k_r-1}\zeta_{11}) &= \zeta(k_1,\ldots,k_r)\end{aligned}$$

と表記する.

4 多重ゼータ値の調和積

多重ゼータ値が Riemann ゼータ値となる場合に対し,

$$\begin{aligned}\zeta(k_1)\zeta(l_1) &= \sum_{m_1>0}\frac{1}{m_1^{k_1}}\sum_{n_1>0}\frac{1}{n_1^{l_1}} = \left(\sum_{m_1>n_1>0} + \sum_{(m_1=n_1)>0} + \sum_{n_1>m_1>0}\right)\frac{1}{m_1^{k_1}n_1^{l_1}}\\ &= \zeta(k_1,l_1) + \zeta(k_1+l_1) + \zeta(l_1,k_1)\end{aligned}$$

という関係式が成立する. このような関係式は一般の "$\zeta(k_1,\ldots,k_r)\zeta(l_1,\ldots,l_s) =$ MZV の和" の形に拡張される. これを多重ゼータ値の調和積と呼ぶ. 調和積は次のように代数的に定式化できる[5](Hoffman [H]). $\mathfrak{h}^0 = \mathbf{C1} + \mathbf{C}\langle\zeta_1, \zeta_{11}\rangle\zeta_{11}$ の調和積 $*$ を

$$\begin{aligned}&\chi_k * \mathbf{1} = \mathbf{1} * \chi_k = \chi_k,\\ &(\chi_{k_1}w_1) * (\chi_{k_2}w_2) = \chi_{k_1}(w_1 * (\chi_{k_2}w_2)) + \chi_{k_2}((\chi_{k_1}w_1) * w_2) + \chi_{k_1+k_2}(w_1 * w_2)\end{aligned}$$

---

[4]集合 A で生成される自由シャッフル代数 (Reutenauer [R]) $S(A)$ は A で生成される非可換多項式環 $\mathbf{C}\langle A\rangle$ に次のシャッフル積 $\sqcup\!\sqcup$ を入れた可換結合代数. $w \sqcup\!\sqcup \mathbf{1} = \mathbf{1} \sqcup\!\sqcup w = w$, $(a_1w_1) \sqcup\!\sqcup (a_2w_2) = a_1(w_1 \sqcup\!\sqcup (a_2w_2)) + a_2((a_1w_1) \sqcup\!\sqcup w_2)$ ($\mathbf{1}$ は $\mathbf{C}\langle A\rangle$ の単位元 (空語), $a_1, a_2 \in A$, $w, w_1, w_2 : \mathbf{C}\langle A\rangle$ の語). $S(A)$ は自然に A で生成される自由 Lie 環の普遍展開環の双対 Hopf 代数の構造を持つ.

[5]通常多重ゼータ値の論文などではここでの (ζ_1, ζ_{11}) を (x, y), χ_i を z_i と表記する. 本稿では座標と混同しないように記号を変えた. また, 本稿での $\mathfrak{h}^0, \mathfrak{h}^{10}$ をそれぞれ $\mathfrak{h}^1, \mathfrak{h}^0$ と表記するのが一般的である.

で定める. ここで, $\chi_k=\zeta_1^{k-1}\zeta_{11}$, w_1,w_2 は $\mathfrak{h}^0$ の語. このとき $(\mathfrak{h}^0,*,\mathbf{1})$ は可換結合代数になり, 多重ゼータ値の調和積は

$$\zeta(w_1)\zeta(w_2)=\zeta(w_1*w_2) \tag{HP-MZV}$$

(w_1,w_2 語 $\in\mathfrak{h}^{10}=\mathbf{C}\mathbf{1}+\zeta_1\mathbf{C}\langle\zeta_1,\zeta_{11}\rangle\zeta_{11}$) と表記される.

同様の考察を多重対数関数に対しても行ってみよう.

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{k_1}(z_1)\,\mathrm{Li}_{l_1}(z_2)&=\sum_{m_1>0}\frac{z_1^{m_1}}{m_1^{k_1}}\sum_{n_1>0}\frac{z_2^{n_1}}{n_1^{l_1}}=\left(\sum_{m_1>n_1>0}+\sum_{(m_1=n_1)>0}+\sum_{n_1>m_1>0}\right)\frac{z_1^{m_1}z_2^{n_1}}{m_1^{k_1}n_1^{l_1}}\\&=\mathrm{Li}_{k_1,l_1}(1,1;z_1,z_2)+\mathrm{Li}_{k_1+l_1}(z_1z_2)+\mathrm{Li}_{l_1,k_1}(1,1;z_2,z_1).\end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(i,r-i;z_1,z_2)$ は次で定義される 2 変数多重対数関数である:

$$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(i,r-i;z_1,z_2):=\sum_{m_1>\dots>m_r>0}\frac{z_1^{m_1}z_2^{m_{i+1}}}{m_1^{k_1}\cdots m_r^{k_r}}. \tag{2MPL}$$

特に, $\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(r,0;z_1,z_2)=\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z_1)$, $\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(0,r;z_1,z_2)=\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z_1z_2)$ である.

これも同様に "$\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_r}(z_1)\,\mathrm{Li}_{l_1,\dots,l_s}(z_2)=$ 2MPL の和" の形に拡張される. それを多重対数関数の調和積[6]と呼ぶことにしよう. 実際に多重対数関数の調和積を作るときには次のようにすればよい.

(i) まず $\chi_{k_1}\cdots\chi_{k_r}*\chi_{l_1}\cdots\chi_{l_s}$ を求める. その各項は $\chi_{p_1}\cdots\chi_{p_t}$ (p_i は k_m,l_n もしくは k_m+l_n) の形をしている.

(ii) 各項で k_1 と l_1 がどこにあるか探す. それぞれ p_{i_1},p_{i_2} の中にあるとする.

(iii) $\chi_{p_1}\cdots\chi_{p_t}$ を $\displaystyle\sum_{m_1>\dots>m_t>0}\frac{z_1^{m_{i_1}}z_2^{m_{i_2}}}{m_1^{p_1}\cdots m_t^{p_t}}$ に置き換える.

この多重対数関数の調和積は複雑であるが,

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_{k_1,\dots,k_i}(z_1)\,\mathrm{Li}_{l_1,\dots,l_j}(z_2)=&\sum_{p=1}^{i-1}\Big(\mathrm{Li}_{(k_1,\dots,k_p,l_1)\cdot((k_{p+1},\dots,k_i)*(l_2,\dots,l_j))}(p,\bullet;z_1,z_2)\\&\qquad+\mathrm{Li}_{(k_1,\dots,k_p,l_1+k_{p+1})\cdot((k_{p+2},\dots,k_i)*(l_2,\dots,l_j))}(p,\bullet;z_1,z_2)\Big)\\&+\mathrm{Li}_{(k_1,\dots,k_i,l_1,\dots,l_j)}(i,j;z_1,z_2)\\&+\sum_{p=1}^{j-1}\Big(\mathrm{Li}_{(l_1,\dots,l_p,k_1)\cdot((k_2,\dots,k_i)*(l_{p+1},\dots,l_j))}(p,\bullet;z_2,z_1)\\&\qquad+\mathrm{Li}_{(l_1,\dots,l_p,k_1+l_{p+1})\cdot((k_2,\dots,k_i)*(l_{p+2},\dots,l_j))}(p,\bullet;z_2,z_1)\Big)\\&+\mathrm{Li}_{(l_1,\dots,l_j,k_1,\dots,k_i)}(j,i;z_2,z_1)\\&+\mathrm{Li}_{(k_1+l_1)\cdot((k_2,\dots,k_i)*(l_2,\dots,l_j))}(0,\bullet;z_2,z_1).\end{aligned} \tag{HP-MPL}$$

という再帰的な関係式で定義することができる[7]

[6]本来は 1 変数多重対数関数の調和積と呼ぶべきだろうが, 煩雑なためただ多重対数関数の調和積と呼ぶことにする. なお, 一般に n 変数 $\times$ m 変数などの調和積も級数としての定義からは考えられるが, モジュライ空間上の方程式として捉えることは出来ない.

[7]インデックス同士の調和積も同様に定義し, Li はインデックスの形式和に対し $\mathbf{Z}$ 線型に拡張する. また, $(a_1,\dots,a_n)\cdot(b_1,\dots,b_m)=(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$ ($\mathbf{Z}$ 線型) とする. また 2MPL の $\bullet$ はインデックスの長さ $-p$ で求めることができるので省略した.

5　2変数形式的KZ方程式と基本解の分解

$\mathcal{M}_{0,5}$ において無限小純組み紐 Lie 環 $\mathfrak{X}$ の元を

$$Z_1 = X_{12} + X_{13} + X_{23},\ Z_{11} = -X_{14},\ Z_2 = X_{23},\ Z_{22} = -X_{12},\ Z_{12} = -X_{24}$$

とすると, (KZ) は次の 2 変数形式的 KZ 方程式となる.

$$dG = \Omega G, \qquad \Omega = \zeta_1 Z_1 + \zeta_{11} Z_{11} + \zeta_2 Z_2 + \zeta_{22} Z_2 + \zeta_{12} Z_{12}, \tag{2KZ}$$

$$\zeta_1 = \frac{dz_1}{z_1},\ \zeta_{11} = \frac{dz_1}{1-z_1},\ \zeta_2 = \frac{dz_2}{z_2},\ \zeta_{22} = \frac{dz_2}{1-z_2},\ \zeta_{12} = \frac{d(z_1z_2)}{1-z_1z_2}.$$

この場合無限小純組み紐関係式 (IPBR) は

$$\text{(IPBR)} \Leftrightarrow \begin{cases} [Z_1, Z_2] = [Z_{11}, Z_2] = [Z_1, Z_{22}] = 0, \\ [Z_{11}, Z_{22}] = [-Z_{11}, Z_{12}] = [Z_{22}, Z_{12}] = [-Z_1 + Z_2, Z_{12}], \end{cases}$$

Arnold 関係式 (AR) は

$$\text{(AR)} \Leftrightarrow \begin{cases} \zeta_1 \wedge \zeta_{11} = 0, \quad \zeta_2 \wedge \zeta_{22} = 0, \\ (\zeta_1 + \zeta_2) \wedge \zeta_{12} = 0, \\ \zeta_{11} \wedge \zeta_{12} + \zeta_{22} \wedge (\zeta_{11} - \zeta_{12}) - \zeta_2 \wedge \zeta_{12} = 0 \end{cases}$$

となり, 共に非自明な関係式を含む. 特異因子は $D = \{z_1 = 0, 1, \infty\} \cup \{z_2 = 0, 1, \infty\} \cup \{z_1z_2 = 1\}$ である. 無限小純組み紐 Lie 環 $\mathfrak{X} = \mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}, Z_2, Z_{22}, Z_{12}\} \big/ \text{(IPBR)}$ は次の分解を持つ.

命題 1. 次の分解が成り立つ.

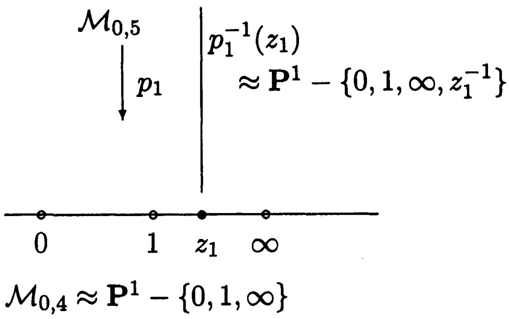
$$\mathfrak{X} \cong \mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}, Z_{12}\} \oplus \mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}\} \cong \mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}\} \oplus \mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}\},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\mathfrak{X}) &\cong \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}, Z_{12}\}) \otimes \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}\}) \\ &\cong \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}\}) \otimes \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}\}) \end{aligned} \tag{DU}$$

特に, $\mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}, Z_{12}\}$, $\mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}\}$ は $\mathfrak{X}$ の Lie イデアル.

この命題は代数的に語の長さに関する帰納法によって証明されるが, 幾何学的にも意味を持つ.

射影 $p_1 : \mathcal{M}_{0,5} \to \mathcal{M}_{0,4} : (z_1, z_2) \mapsto z_1$ $\Big(\mathbb{F}_2(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}) \to \mathbb{F}_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty\}) : (y_1, y_2) \mapsto y_1$ に対応$\Big)$ により $\mathcal{M}_{0,5}$ は $\mathcal{M}_{0,4}$ 上のファイバー空間構造を持つ (z_1 上のファイバーは $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty, z_1^{-1}\}$).



ここでホモトピー群の完全系列

$$\begin{aligned} \pi_2(\mathcal{M}_{0,4}, z_1) &= 1 \to \pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty,z_1^{-1}\}, z_2) \to \pi_1(\mathcal{M}_{0,5}, (z_1, z_2)) \\ &\to \pi_1(\mathcal{M}_{0,4}, z_1) \to \pi_0(\mathbf{P}^1 - \{0,1,\infty,z_1^{-1}\}, z_2) = 1 \end{aligned}$$

並びに切断 $\pi_1(\mathcal{M}_{0,4}, z_1) \to \pi_1(\mathcal{M}_{0,5}, (z_1, z_2))$ の存在から基本群の分解

$$\pi_1(\mathcal{M}_{0,5}, (z_1, z_2)) \cong \pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty, z_1^{-1}\}, z_2) \rtimes \pi_1(\mathcal{M}_{0,4}, z_1)$$

が得られる．この基本群の分解の降中心列を取って Lie 環化する (分解の無限小版, 伊原 [I]) と $\mathfrak{X}$ の分解

$$\mathfrak{X} \cong \mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}\} \oplus \mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}\}$$

($\mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}\}$ は Lie イデアル) を得る．

同様に $p_2 : (z_1, z_2) \mapsto z_2$, すなわち $(y_1, y_2) \mapsto y_2/y_1$ も $\mathcal{M}_{0,5}$ の $\mathcal{M}_{0,4}$ を底空間 (変数:z_2), $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty, z_2^{-1}\}$ をファイバー (変数:z_1) とするファイバー空間構造を与え, 基本群の分解

$$\pi_1(\mathcal{M}_{0,5}, (z_1, z_2)) \cong \pi_1(\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty, z_2^{-1}\}, z_1) \rtimes \pi_1(\mathcal{M}_{0,4}, z_2)$$

並びに無限小版

$$\mathfrak{X} \cong \mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}, Z_{12}\} \oplus \mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}\}$$

($\mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}, Z_{12}\}$ は Lie イデアル) を誘導する[8].

6 被約バー代数と 2 変数の反復積分

次に $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の双対である微分形式のなす代数を考えよう．これは幾何学的には $\mathcal{M}_{0,5}$ のループ空間の 0 次コホモロジー群であり, Chen の定理 ([C1]) により対応する Orlik-Solomon 代数から定まる被約バー複体の 0 次コホモロジー群と同型になる．しかし本稿ではコホモロジー論によらずに代数的, 組合せ論的に考察する．

$A = \{\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_2, \zeta_{22}, \zeta_{12}\}$, $S = S(A)$ を A で生成される自由シャッフル代数とする．S の s 次の元

$$S \ni \sum_{I=(i_1,\ldots,i_s)} c_I\, \omega_{i_1} \cdots \omega_{i_s}, \quad (C_I \in \mathbf{C},\ \ \omega_i \in A)$$

が次を満たすとき, Chen の可積分条件を満たすという．
" 任意の $1 \leq l \leq s-1$ に対して多重微分形式として

$$\sum_I c_I\, \omega_{i_1} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_l} \wedge \omega_{i_{l+1}} \otimes \cdots \otimes \omega_{i_s} = 0 \text{ ''} \tag{CIC}$$

この条件を満たす元に対しては反復積分 $\int_{(z_1^{(0)}, z_2^{(0)})}^{(z_1, z_2)} \varphi$ が積分路のホモトピー類にのみ依存して定まり, $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1 - D$ 上の多価解析関数を定める (Chen の補題 [C2]).

被約バー代数 $\mathcal{B}$ を Chen の可積分条件を満たす元で張られる S の部分空間として定める[9]. このとき $\mathcal{B} = \bigoplus_{s=0}^{\infty} \mathcal{B}_s$ は S の次数付き部分 Hopf 代数 (次数は語の長さ) であり, $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の双対

[8] $\mathcal{M}_{0,5}$ の 5 角形において各特異因子には $\mathcal{M}_{0,4}$ が貼り合わされていると思うことができるが, この射影 p_1, p_2 はそれぞれ D_{23}, D_{45} への射影に対応している．

[9] $\mathcal{M}_{0,4}$ の場合は $\zeta_1 \wedge \zeta_1 = \zeta_{11} \wedge \zeta_1 = \zeta_{11} \wedge \zeta_{11} = 0$ なので, 被約バー代数は $S(\zeta_1, \zeta_{11})$ そのものである．

Hopf 代数になる. 双対は $(Z_1, Z_{11}, Z_2, Z_{22}, Z_{12}) \leftrightarrow (\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_2, \zeta_{22}, \zeta_{12})$ の文字の置き替えで与えられる. $\mathcal{B}$ の低次の部分は具体的に次のようになっている.

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0 &= \mathbf{C1}, \\
\mathcal{B}_1 &= \mathbf{C}\zeta_1 \oplus \mathbf{C}\zeta_{11} \oplus \mathbf{C}\zeta_2 \oplus \mathbf{C}\zeta_{22} \oplus \mathbf{C}\zeta_{12}, \\
\mathcal{B}_2 &= \bigoplus_{\omega \in A} \mathbf{C}\omega\omega \oplus \bigoplus_{i=1,2} \mathbf{C}\zeta_i\zeta_{ii} \oplus \bigoplus_{i=1,2} \mathbf{C}\zeta_{ii}\zeta_i \\
&\quad \oplus \bigoplus_{\substack{\omega_1=\zeta_1,\zeta_{11} \\ \omega_2=\zeta_2,\zeta_{22}}} \mathbf{C}(\omega_1\omega_2 + \omega_2\omega_1) \oplus \bigoplus_{\omega \in A-\{\zeta_{12}\}} \mathbf{C}(\omega\zeta_{12} + \zeta_{12}\omega) \\
&\quad \oplus \mathbf{C}(\zeta_1\zeta_{12} + \zeta_2\zeta_{12}) \oplus \mathbf{C}(\zeta_{11}\zeta_{12} + \zeta_{22}\zeta_{11} - \zeta_{22}\zeta_{12} - \zeta_2\zeta_{12})
\end{aligned}$$

さらに $s > 2$ に対し, $\mathcal{B}_s$ は次で与えられる (Brown [B]).

$$\mathcal{B}_s = \bigcap_{j=1}^{s-1} \mathcal{B}_j \mathcal{B}_{s-j} = \bigcap_{j=0}^{s-2} \underbrace{\mathcal{B}_1 \cdots \mathcal{B}_1}_{j\text{ 個}} \mathcal{B}_2 \underbrace{\mathcal{B}_1 \cdots \mathcal{B}_1}_{s-j-2\text{ 個}}.$$

$\mathcal{B}^0$ を $\mathcal{B}$(resp. S^0 を S) の部分代数で ζ_1, ζ_2 で終わる項を含まない元からなるものとする. $\mathcal{B}^0$ の元 φ に対しては積分路の始点を $(0,0)$ にして, 反復積分 $\int_{(0,0)}^{(z_1,z_2)} \varphi$ を考えることができる.

$\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の分解に対応し, $\mathcal{B}$ は次のように分解される.

命題 2. $\zeta_{12}^{(1)} = \frac{z_2 dz_1}{1-z_1z_2}$, $\zeta_{12}^{(2)} = \frac{z_1 dz_2}{1-z_1z_2}$ とおく. 射影 $\mathrm{Pr}_{i\otimes j}^{(i)}, \mathrm{Pr}_{i\otimes j}^{(j)}$ $(\{i,j\} = \{1,2\})$ を

$$\begin{aligned}
\mathrm{Pr}_{i\otimes j}^{(i)} &: S \to S(\zeta_i, \zeta_{ii}, \zeta_{12}^{(i)}), \quad \zeta_j, \zeta_{jj} \mapsto 0,\ \zeta_{12} \mapsto \zeta_{12}^{(i)}, \\
\mathrm{Pr}_{i\otimes j}^{(j)} &: S \to S(\zeta_j, \zeta_{jj}), \quad \zeta_i, \zeta_{ii}, \zeta_{12} \mapsto 0
\end{aligned}$$

とする. これと $\mathcal{B}$ の余積[10]Δ^* を用いて写像 $\iota_{1\otimes 2} : \mathcal{B} \to S(\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_{12}^{(1)}) \otimes S(\zeta_2, \zeta_{22})$ を

$$\iota_{i\otimes j} = \left(\mathrm{Pr}_{i\otimes j}^{(i)}\Big|_{\mathcal{B}} \otimes \mathrm{Pr}_{i\otimes j}^{(j)}\Big|_{\mathcal{B}} \right) \circ \Delta^*$$

で定める. このとき $\iota_{1\otimes 2}$, $\iota_{2\otimes 1}$ はシャッフル代数同型. さらに, $\mathcal{B}^0$ への制限 $\iota_{i\otimes j}|_{\mathcal{B}^0} : \mathcal{B}^0 \to S^0(\zeta_i, \zeta_{ii}, \zeta_{12}^{(i)}) \otimes S^0(\zeta_j, \zeta_{jj})$ $(\{i,j\} = \{1,2\})$ もまたシャッフル代数同型となる. 特に線形同型

$$\mathcal{B} \cong \mathcal{B}^0[\zeta_1, \zeta_2]$$

を得る[11].

この命題は $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ と $\mathcal{B}$ の次数を保つ双対と命題 1 の分解, ならびに組合せ論的な考察によって証明される[12].

$\iota_{i\otimes j}$ は次の方法で得られる写像である:

[10] $\Delta^*(\omega_1 \cdots \omega_r) = \sum_{i=0}^{r} \omega_1 \cdots \omega_i \otimes \omega_{i+1} \cdots \omega_r$ $(\omega_k \in A,\ i = 0, r$ の時消える項は $\mathbf{1}$ とみなす).

[11] 1 変数の場合 $S(\zeta_1, \zeta_{11})$ が $\mathfrak{h}^0 = \mathbf{C1} + \mathbf{C}\langle\zeta_1, \zeta_{11}\rangle\zeta_{11}$ 上のシャッフル多項式環 $S(\zeta_1, \zeta_{11}) \cong \mathfrak{h}^0[\zeta_1]$ となることが知られているが, これはそれの 2 変数版といえる.

[12] 幾何学的には基本群の分解がループ空間のコホモロジーの分解と対応している.

(i) $\psi_i\psi_j$ ($\psi_i \in S(\zeta_i, \zeta_{ii}, \zeta_{12})$, $\psi_j \in S(\zeta_j, \zeta_{jj})$) の形の項のみを取り出す.

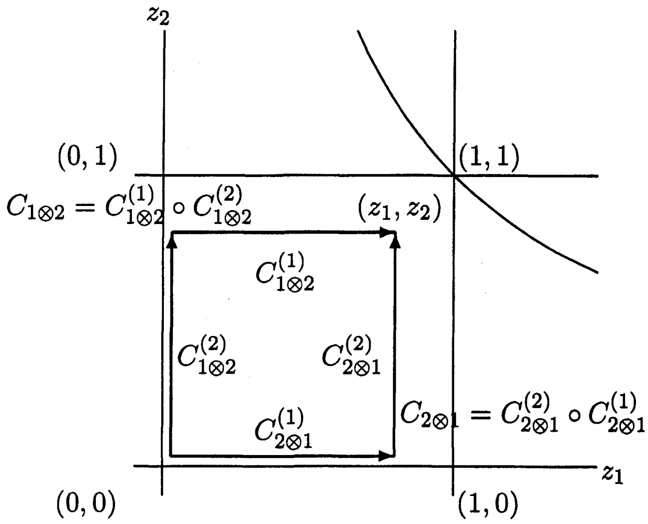
(ii) $\psi_i\psi_j$ を $\psi_i \otimes \psi_j \in S(\zeta_i, \zeta_{ii}, \zeta_{12}) \otimes S(\zeta_j, \zeta_{jj})$ に置き換える.

(iii) ζ_{12} を $\zeta_{12}^{(i)}$ に置き換える.

これはまた右記の積分路 $C_{i\otimes j}$ と対応しており, $\mathcal{B}^0$ の元を $C_{i\otimes j}$ に沿って積分する際に消えずに残る項を取り出す写像になっている.

即ち, $\varphi \in \mathcal{B}^0$ に対し, 次が成立する.

$$\int_{(0,0)}^{(z_1,z_2)} \varphi = \int_{C_{1\otimes 2}} \varphi = \int_{C_{1\otimes 2}} \iota_{1\otimes 2}(\varphi)$$
$$= \int_{C_{2\otimes 1}} \varphi = \int_{C_{2\otimes 1}} \iota_{2\otimes 1}(\varphi).$$



ここで, 一番右側の積分はそれぞれ

$$\int_{C_{1\otimes 2}} \psi_1 \otimes \psi_2 := \int_0^{z_1} \psi_1 \int_0^{z_2} \psi_2 \quad (\psi_1 \otimes \psi_2 \in S^0(\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_{12}^{(1)}) \otimes S^0(\zeta_2, \zeta_{22})),$$
$$\int_{C_{2\otimes 1}} \psi_1 \otimes \psi_2 := \int_0^{z_2} \psi_1 \int_0^{z_1} \psi_2 \quad (\psi_1 \otimes \psi_2 \in S^0(\zeta_2, \zeta_{22}, \zeta_{12}^{(2)}) \otimes S^0(\zeta_1, \zeta_{11}))$$ を意味する.

7 超対数関数

積分路 $C_{1\otimes 2}$, $C_{2\otimes 1}$ に沿った反復積分において, $\int_0^{z_1} w \quad (w \in S^0(\zeta_1, \zeta_{11}))$ と $\int_0^{z_2} w \quad (w \in S^0(\zeta_2, \zeta_{22}))$ は §3 の 1 変数多重対数関数

$$\int_0^{z_i} w = \mathrm{Li}(w; z_i) \qquad (w \in S^0(\zeta_i, \zeta_{ii}))$$

であった[13]. ここでは残りの $\int_0^{z_1} w \quad (w \in S^0(\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_{12}^{(1)}))$, $\int_0^{z_2} w \quad (w \in S^0(\zeta_2, \zeta_{22}, \zeta_{12}^{(2)}))$ を超対数関数 (hyperlogarithm)[14] と呼ぶことにしよう.

$w = \zeta_1^{k_1-1}\omega_1 \cdots \zeta_1^{k_r-1}\omega_r \in S^0(\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_{12}^{(1)}) \quad (\omega_i \in \{\zeta_{11}, \zeta_{12}^{(1)}\})$ に対し, 主変数 z_1, $\{0, 1, \frac{1}{z_2}, \infty\}$ に特異点を持つ超対数関数を

$$L(w; z_1) = L({}^{k_1}\alpha_1 \cdots {}^{k_r}\alpha_r; z_1) := \int_0^{z_1} w = \sum_{m_1 > \cdots > m_r > 0} \frac{\alpha_1^{m_1-m_2}\alpha_2^{m_2-m_3} \cdots \alpha_r^{m_r}}{m_1^{k_1} \cdots m_r^{k_r}} z_1^{m_1}$$

---

[13] $\mathcal{M}_{0,4}$ においてはそれだけで全ての反復積分の結果が表記できる.

[14] 超対数関数はより多変数の多重対数関数の変数を特殊値に制限したものとみなすことができる

($\omega_i = \zeta_{11}$ (resp. $\omega_i = \zeta_{12}^{(1)}$) のとき $\alpha_i = 1$ (resp. z_2)) で定める. これは $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \frac{1}{z_2}, \infty\}$ 上の多価解析関数で, 原点の十分小さな近傍で右辺の Taylor 展開で表される分枝を持つ.

特に, $w \in S^0(\zeta_1, \zeta_{11})$ のときは 1 変数多重対数関数

$$L({}^{k_1}1 \cdots {}^{k_r}1; z_1) = \mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(z_1)$$

であり, $w_1, \ldots, w_i = \zeta_{11}, w_{i+1}, \ldots, w_r = \zeta_{12}^{(1)}$ のときは §4 で定義した 2 変数多重対数関数

$$L({}^{k_1}1 \cdots {}^{k_i}1^{k_{i+1}}z_2 \cdots {}^{k_r}z_2; z_1) = \mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(i, r-i; z_1, z_2)$$

となる.

$w \in S^0(\zeta_2, \zeta_{22}, \zeta_{12}^{(2)})$ に対しても主変数 z_2, $\{0, 1, \frac{1}{z_1}, \infty\}$ に特異点を持つ超対数関数を同様に定める.

この表記を用いると, $\mathcal{B}^0$ の元を $C_{1\otimes 2}$ に沿って反復積分した結果は主変数 z_1 の超対数関数と z_2 変数の多重対数関数の積で, $C_{1\otimes 2}$ に沿って反復積分した結果は主変数 z_2 の超対数関数と z_1 変数の多重対数関数の積で書き表す事ができる.

8 一般化された調和積関係式と多重対数関数の調和積

以上をまとめることにより, 直ちに次の定理を得る. これにより得られる超対数関数の関数等式を一般化された調和積関係式 (generalized harmonic product relation) と呼ぶ.

定理 3 ([OU]). 各 $\varphi \in \mathcal{B}^0$ に対し, 超対数関数の関数等式

$$\int_{C_{1\otimes 2}} \iota_{1\otimes 2}(\varphi) = \int_{C_{2\otimes 1}} \iota_{2\otimes 1}(\varphi) \qquad \text{(GHPR)}$$

が成り立つ.

特に, $w \in S^0(\zeta_1, \zeta_{11}, \zeta_{12}^{(1)})$ とし, $\iota_{1\otimes 2}^{-1}(w \otimes \mathbf{1})$ に対して定理を適用すると, (GHPR) は

$$L(w; z_1) = \int_{C_{2\otimes 1}} \iota_{2\otimes 1} \circ \iota_{1\otimes 2}^{-1}(w \otimes \mathbf{1}) \qquad \text{(GHPR')}$$

と書くことができる.

例えばごく低次の場合一般化された調和積関係式を書き下してみると, 次のようになる[15].

- $w = \zeta_{11}\zeta_{12}^{(1)}$ $\quad \iota_{1\otimes 2}^{-1}(w \otimes \mathbf{1}) = \zeta_{11}\zeta_{12} + \zeta_{22}\zeta_{11} - \zeta_{22}\zeta_{12} - \zeta_2\zeta_{12}$,
$\mathrm{Li}_{1,1}(1, 1; z_1, z_2) = \mathrm{Li}_1(z_2)\,\mathrm{Li}_1(z_1) - \mathrm{Li}_{1,1}(1, 1; z_2, z_1) - \mathrm{Li}_2(0, 1 : z_2, z_1)$.
- $w = \zeta_{12}^{(1)}\zeta_{11}$ $\quad \iota_{1\otimes 2}^{-1}(w \otimes \mathbf{1}) = \zeta_{12}\zeta_{11} - \zeta_{22}\zeta_{11} + \zeta_{22}\zeta_{12} + \zeta_2\zeta_{12}$,
$L({}^1z_2{}^1 1; z_1) = \mathrm{Li}_1(0, 1; z_2, z_1)\,\mathrm{Li}_1(z_1) - \mathrm{Li}_1(z_2)\,\mathrm{Li}_1(z_1) + \mathrm{Li}_{1,1}(1, 1; z_2, z_1) + \mathrm{Li}_2(0, 1; z_2, z_1)$.

[15] ι の逆写像を一般に求めるのは組合せ論的に面白い問題ではあるが, 大変難しい.

- $w = \zeta_{12}^{(1)}\zeta_{11}\zeta_{12}^{(1)}$

$$\iota_{1\otimes 2}^{-1}(w\otimes \mathbf{1}) = \zeta_{12}\zeta_{11}\zeta_{12} + \zeta_{12}\zeta_{22}\zeta_{11} + \zeta_{22}\zeta_{12}\zeta_{11} - \zeta_{22}\zeta_{11}\zeta_{12} - 2\zeta_{22}\zeta_{22}\zeta_{11} + 2\zeta_{22}\zeta_{22}\zeta_{12} + 2\zeta_{22}\zeta_{2}\zeta_{12} - \zeta_{12}\zeta_{22}\zeta_{12} - \zeta_{12}\zeta_{2}\zeta_{12},$$

$$L({}^1z_2{}^11^1z_2;z_1) = -2\,\mathrm{Li}_{1,1}(z_2)\,\mathrm{Li}_1(z_1) + 2\,\mathrm{Li}_{1,1,1}(2,1;z_2,z_1) + 2\,\mathrm{Li}_{1,2}(1,1;z_2,z_1) + L({}^1z_1{}^11;z_2)\,\mathrm{Li}_1(z_1) + \mathrm{Li}_{1,1}(1,1;z_2,z_1)\,\mathrm{Li}_1(z_1) - L({}^1z_1{}^11^1z_1;z_2) - \mathrm{Li}_{1,2}(0,2;z_2,z_1).$$

さらに, このうち左辺が 2 変数多重対数関数になるものは右辺もまた 2 変数多重対数関数のみで表す事が出来, それら全体が実は 2 変数多重対数関数の調和積と同値である[16].

定理 4 ([OU]). $w = \zeta_1^{k_1-1}\zeta_{11}\cdots\zeta_1^{k_i-1}\zeta_{11}\zeta_1^{k_{i+1}-1}\zeta_{12}^{(1)}\cdots\zeta_1^{k_r-1}\zeta_{12}^{(1)} \in S^0(\zeta_1,\zeta_{11},\zeta_{12}^{(1)})$ に対し, 一般化された調和積関係式 (GHPR') は 2 変数多重対数関数の関数等式を与える. さらに, これらの関係式は多重対数関数の調和積と同値である.

証明の概略. 主変数 z_1, パラメータ z_2 の 2 変数多重対数関数の z_1, z_2 による偏微分が再び 2 変数多重対数関数になり, 全微分が

$$d\,\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(i, r-i : z_1, z_2) = \zeta_1 f_1 + \zeta_{11} f_{11} + \zeta_2 f_2 + \zeta_{22} f_{22} + \zeta_{12} f_{12}$$

($f_1, \ldots, f_{12}$ は重み[17]が 1 下がった 2 変数多重対数関数の和) と書けることを用いる. この 2 変数多重対数関数の全微分を繰り返し取ることにより $\iota_{1\otimes 2}^{-1}(w\otimes 1) \in \mathcal{B}^0$ を帰納的に構成することが出来, 一般化された調和積関係式を

$$\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(i, r-i : z_1, z_2) = \int_{C_{2\otimes 1}} d\,\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(i, r-i : z_1, z_2)$$

という再帰的な関係式として書くことができる. この関係式は (z_1 の 2MPL)×(z_2 の 1MPL) を (z_2 の 2MPL)×(z_1 の 1MPL) に書き直す方法を与えており, それが多重対数関数の調和積を定義する関係式 (HP-MPL) と等しい事が示される.

9 2変数形式的 KZ 方程式の正規化された基本解とその分解

一般化された調和積関係式を解の接続問題として捉えるため, 2 変数形式的 KZ 方程式の基本解を構成してこれまでの議論と結びつけよう.

命題 5 ([OU]). Ω_0, Ω' をそれぞれ

$$\Omega_0 = \zeta_1 Z_1 + \zeta_2 Z_2, \qquad (\Omega \text{ の } (0,0) \text{ で特異性を持つパート})$$

$$\Omega' = \Omega - \Omega_0 = \zeta_{11}Z_{11} + \zeta_{22}Z_{22} + \zeta_{12}Z_{12}. \qquad (\Omega \text{ の } (0,0) \text{ で正則なパート})$$

---

[16] 互いに線形結合で表せるという意味.

[17] 多重対数関数 $\mathrm{Li}_{k_1,\ldots,k_r}(i, r-i : z_1, z_2)$ に対し, インデックスの和 $k_1 + \cdots + k_r$ を重みと呼ぶ.

とする．原点で正規化された基本解 $\mathcal{L}(z_1,z_2)=\hat{\mathcal{L}}(z_1,z_2)z_1^{Z_1}z_2^{Z_2}(\hat{\mathcal{L}}(z_1,z_2)$ は $(0,0)$ で正則で $\hat{\mathcal{L}}(0,0)=\mathbf{I})$ は一意的であり，次で与えられる[18]．

$$\hat{\mathcal{L}}(z_1,z_2)=\sum_{s=0}^{\infty}\hat{\mathcal{L}}_s(z_1,z_2),$$
$$\hat{\mathcal{L}}_s(z_1,z_2)=\int_{(0,0)}^{(z_1,z_2)}\left(\mathrm{ad}(\Omega_0)+\mu(\Omega')\right)^s(\mathbf{1}\otimes\mathbf{I}). \tag{2KZSol}$$

更に，任意の s に対して $\left(\mathrm{ad}(\Omega_0)+\mu(\Omega')\right)^s(\mathbf{1}\otimes\mathbf{I})\ \in\mathcal{B}^0\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ となっている．

一方，2 変数形式的 KZ 方程式を $C_{1\otimes2}^{(1)}$, $C_{1\otimes2}^{(2)}$, $C_{2\otimes1}^{(2)}$, $C_{2\otimes1}^{(1)}$ に制限する[19]．このとき 2 変数形式的 KZ 方程式は以下の 4 つの (一般化された[20])1 変数形式的 KZ 方程式となり，基本解が次のように与えられる．d_{z_1} (resp. d_{z_2}) は z_1 (resp. z_2) による外微分とする．

$$\begin{aligned}
C_{1\otimes2}^{(1)}:&\quad d_{z_1}G(z_1,z_2)=\Omega_{1\otimes2}^{(1)}G(z_1,z_2),\quad \Omega_{1\otimes2}^{(1)}=\zeta_1Z_1+\zeta_{11}Z_{11}+\zeta_{12}^{(1)}Z_{12},\\
&\quad \text{基本解 } \mathcal{L}_{1\otimes2}^{(1)}=\hat{\mathcal{L}}_{1\otimes2}^{(1)}\,z_1^{Z_1},\\
C_{1\otimes2}^{(2)}:&\quad d_{z_2}G(z_2)=\Omega_{1\otimes2}^{(2)}G(z_2),\quad \Omega_{1\otimes2}^{(2)}=\zeta_2Z_2+\zeta_{22}Z_{22},\\
&\quad \text{基本解 } \mathcal{L}_{1\otimes2}^{(2)}=\hat{\mathcal{L}}_{1\otimes2}^{(2)}\,z_2^{Z_2},\\
C_{2\otimes1}^{(2)}:&\quad d_{z_2}G(z_1,z_2)=\Omega_{2\otimes1}^{(2)}G(z_1,z_2),\quad \Omega_{2\otimes1}^{(2)}=\zeta_2Z_2+\zeta_{22}Z_{22}+\zeta_{12}^{(2)}Z_{12},\\
&\quad \text{基本解 } \mathcal{L}_{2\otimes1}^{(2)}=\hat{\mathcal{L}}_{2\otimes1}^{(2)}\,z_2^{Z_2},\\
C_{2\otimes1}^{(1)}:&\quad d_{z_1}G(z_1)=\Omega_{2\otimes1}^{(1)}G(z_1),\quad \Omega_{2\otimes1}^{(1)}=\zeta_1Z_1+\zeta_{11}Z_{11},\\
&\quad \text{基本解 } \mathcal{L}_{2\otimes1}^{(1)}=\hat{\mathcal{L}}_{2\otimes1}^{(1)}\,z_1^{Z_1}.
\end{aligned}$$

ここで，各 $\hat{\mathcal{L}}_{i\otimes j}^{(k)}$ は $z_k=0$ で正則で $\hat{\mathcal{L}}_{i\otimes j}^{(k)}\Big|_{z_k=0}=\mathbf{I}$ を満たしている関数として特徴付けられる．これに対して次の命題 (分解定理) が成立する．この命題は次節で見るように実際に解の反復積分表示を考えると明らかだが，解の具体的な表記を用いなくても方程式の形と命題 1 の $\mathfrak{X}$ の分解，解の漸近挙動のみから示すことができる．

命題 6 (分解定理). (2KZ) の原点で正規化された基本解 $\mathcal{L}(z_1,z_2)$ は次のように 1 変数の方程式の基本解の積に分解される．

$$\mathcal{L}(z_1,z_2)=\mathcal{L}_{1\otimes2}^{(1)}\mathcal{L}_{1\otimes2}^{(2)}=\mathcal{L}_{2\otimes1}^{(2)}\mathcal{L}_{2\otimes1}^{(1)},$$
$$\hat{\mathcal{L}}(z_1,z_2)=\hat{\mathcal{L}}_{1\otimes2}^{(1)}\hat{\mathcal{L}}_{1\otimes2}^{(2)}=\hat{\mathcal{L}}_{2\otimes1}^{(2)}\hat{\mathcal{L}}_{2\otimes1}^{(1)}.$$

---

[18] $\omega\in\{\zeta_1,\dots,\zeta_{12}\}$, $\varphi\in\mathcal{B}$, $X\in\{Z_1,\dots,Z_{12}\}$, $F\in\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ に対し，$\mathrm{ad}(\omega\otimes X)(\varphi\otimes F)=\omega\varphi\otimes[X,F]$, $\mu(\omega\otimes X)(\varphi\otimes F)=\omega\varphi\otimes XF$.

[19] それぞれ $z_2=$ 定数, $z_1=0$, $z_1=$ 定数, $z_2=0$ で定義される積分路.

[20] $\mathbf{P}^1-\{0,a_1,\dots,a_n,\infty\}$ 上の全微分方程式 $dG=\frac{X_0dz}{z}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_iX_idz}{1-a_iz}$ を一般化された 1 変数形式的 KZ 方程式 (あるいは形式的 Schlesinger 系) と呼ぶ. これに関しても 1 変数形式的 KZ 方程式と同様に基本解が構成できる.

10 2変数形式的KZ方程式の解の反復積分表示

2変数形式的KZ方程式の原点で正規化された基本解 $\mathcal{L}(z_1,z_2)$ を具体的に計算してみよう．$\alpha:\mathcal{U}(\mathfrak{X})\to\mathrm{End}(\mathcal{U}(\mathfrak{X}))$ を

$$\alpha:(Z_1,Z_{11},Z_2,Z_{22},Z_{12})\mapsto(\mathrm{ad}(Z_1),\mu(Z_{11}),\mathrm{ad}(Z_2),\mu(Z_{22}),\mu(Z_{12}))$$

とし，$\theta^{(i)}_{i\otimes j}$，$\theta^{(j)}_{i\otimes j}$ をそれぞれ $\mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_i,Z_{ii},Z_{12}\})\to S(\zeta_i,\zeta_{ii},\zeta^{(i)}_{12})$，$\mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_j,Z_{jj}\})\to S(\zeta_j,\zeta_{jj})$ の双対を与える写像とする．すなわち

$$\begin{aligned}
&\theta^{(i)}_{i\otimes j}(Z_i)=\zeta_i, && \theta^{(i)}_{i\otimes j}(Z_{ii})=\zeta_{ii}, && \theta^{(i)}_{i\otimes j}(Z_{12})=\zeta^{(i)}_{12},\\
&\theta^{(j)}_{i\otimes j}(Z_j)=\zeta_j, && \theta^{(j)}_{i\otimes j}(Z_{jj})=\zeta_{jj}
\end{aligned}$$

で定義する．

命題 7 ([OU]). (2KZSol) において反復積分の積分路を $C_{1\otimes2}$ にとると，$\mathcal{L}(z_1,z_2)$ の正則部分の s 次パートは

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{L}}_s(z_1,z_2)&=\int_{C_{1\otimes2}}\left(\mathrm{ad}(\Omega_0)+\mu(\Omega')\right)^s(\mathbf{1}\otimes\mathbf{I})\\
&=\int_{C_{1\otimes2}}(\iota_{1\otimes2}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{U}(\mathfrak{X})})\left(\left(\mathrm{ad}(\Omega_0)+\mu(\Omega')\right)^s(\mathbf{1}\otimes\mathbf{I})\right)\\
&=\sum_{W',W''}L(\theta^{(1)}_{1\otimes2}(W');z_1)L(\theta^{(2)}_{1\otimes2}(W'');z_2)\;\;\alpha(W')\alpha(W'')(\mathbf{I})
\end{aligned}$$

と計算できる．但し，ここで和 $\sum_{W',W''}$ は W' が Z_1,Z_{11},Z_{12} の Z_1 で終わらない語，W'' が Z_2,Z_{22} の Z_2 で終わらない語で長さの和が s であるような組全体を動く．これは $\hat{\mathcal{L}}^{(1)}_{1\otimes2}\hat{\mathcal{L}}^{(2)}_{1\otimes2}$ の s 次パートに等しい[21]．同様に積分路を $C_{2\otimes1}$ にとると，

$$\hat{\mathcal{L}}_s(z_1,z_2)=\sum_{W',W''}L(\theta^{(2)}_{2\otimes1}(W');z_2)L(\theta^{(1)}_{2\otimes1}(W'');z_1)\;\;\alpha(W')\alpha(W'')(\mathbf{I}),$$

和 $\sum_{W',W''}$ は W' が Z_2,Z_{22},Z_{12} の Z_2 で終わらない語，W'' が Z_1,Z_{11} の Z_1 で終わらない語で長さの和が s であるような組全体を動く，となり，$\hat{\mathcal{L}}^{(2)}_{2\otimes1}\hat{\mathcal{L}}^{(1)}_{2\otimes1}$ の s 次パートに等しい[22]．

これより直ちに分解定理の2通りの分解は基本解を $C_{1\otimes2},C_{2\otimes1}$ それぞれの積分路で計算した結果に対応していることが分かる．

また，これらはそれぞれ z_1 (resp. z_2) を主変数とする超対数関数と z_2 (resp. z_1) 変数の1変数多重対数関数を係数とする Z_1,Z_{11},Z_{12} が Z_2,Z_{22} の左にある (resp. Z_2,Z_{22},Z_{12} が Z_1,Z_{11} の左にある) $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の元の線形結合であり，それぞれの $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ 部分を無限小純組み紐関係式 (IPBR)

[21] Z_1 が Z_2,Z_{22} と可換であるので W' を Z_1,Z_{11},Z_{12} の語，W'' を Z_2,Z_{22} の語とすると $\mathrm{ad}(Z_1)(W'W'')=\mathrm{ad}(Z_1)(W')W''$ であることに注意する．

[22] この命題の1変数の場合が (1KZSol) に他ならない．

を用いて同じ基底で書き直して係数を比較することにより関数等式を得ることができる. しかしそもそも被積分形式 $(\mathrm{ad}(\Omega_0)+\mu(\Omega'))^s(\mathbf{1}\otimes\mathbf{I})$ が $\mathcal{B}^0\otimes\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ に属する, すなわち $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の任意の基底に対してその係数が $\mathcal{B}^0$ に属することを思い出すと, その係数の比較は $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ の基底に対応する $\mathcal{B}^0$ の元を $C_{1\otimes 2}$, $C_{1\otimes 2}$ に沿って積分した結果と等しくなければならない. これは一般化された調和積関係式そのものである[23].

以上の議論により一般化された調和積関係式 (純代数的, 組合せ論的に得られる関係式), 分解定理における 2 通りの分解における係数の比較 (微分方程式の解の漸近挙動のみから得られる), 形式的 KZ 方程式の基本解の 2 通りの積分路に応じた表示における係数の比較 (積分路の選択という幾何によって得られる関係式) が全て同値であることが示された.

さらに, 積分路 $C_{1\otimes 2}, C_{2\otimes 1}$ の選択は解の変換, 即ち $(0,0),(0,1)$ における基本解の接続公式[24]と $(0,0),(1,0)$ における基本解の接続公式に対して変数変換 $(z_1,z_2)\to(z_2,z_1)$ を施したものが等しい, として解釈できる. これはもとの 5 角形の座標 $\{x_{ij}\}$ で考えると添字を (24)(35) で置換する解の変換に対応しており, 一般化された調和積関係式 (調和積) を解の変換理論, 接続問題として解釈することが出来た.

11 3変数以上への一般化

一般に $\mathcal{M}_{0,n}$ は (単体座標の変数を落とす射影などによって)$\mathcal{M}_{0,n-1}$ 上のファイバー空間構造を持つ (ファイバーは $\mathbf{P}^1-\{n-1\text{ 点}\}$). しかし, 立方体座標の変数を落とす射影が $\mathcal{M}_{0,n}$ の $\mathcal{M}_{0,n-1}$ 上のファイバー空間構造を与えているとは限らない. 与えている場合は 2 変数と同様の方法で解の分解と超対数関数の関数等式を得ることができる. この場合基本群は

$$
\begin{aligned}
\pi_2(\mathcal{M}_{0,n-1}) &= 1\to\pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-1\text{ 点}\})\to\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}) \\
&\qquad\leftrightarrows\pi_1(\mathcal{M}_{0,n-1})\to\pi_0(\mathbf{P}^1-\{n-1\text{ 点}\}) \;=1
\end{aligned}
$$

という分裂する完全系列を持ち, 次のように分解する.

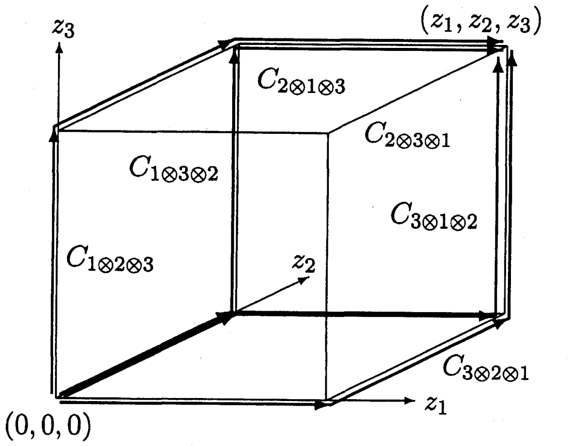
$$
\begin{aligned}
\pi_1(\mathcal{M}_{0,n}) &\cong \pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-1\text{ 点}\})\rtimes\pi_1(\mathcal{M}_{0,n-1}) \\
&\cong \pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-1\text{ 点}\})\rtimes\big(\pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-2\text{ 点}\})\rtimes\pi_1(\mathcal{M}_{0,n-2})\big) \\
&\cong \pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-1\text{ 点}\})\rtimes\Big(\pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-2\text{ 点}\})\rtimes\big(\pi_1(\mathbf{P}^1-\{n-3\text{ 点}\}) \\
&\qquad\cdots(\pi_1(\mathbf{P}^1-\{4\text{ 点}\})\rtimes\pi_1(\mathbf{P}^1-\{3\text{ 点}\})\cdots\Big).
\end{aligned}
$$

例えば 3 変数 $(\mathcal{M}_{0,6})$ の場合, 立方体座標 (z_1,z_2,z_3) において特異因子は $z_i=0,1,\infty\ \ (i=1,2,3)$, $z_1z_2=1$, $z_2z_3=1$, $z_1z_2z_3=1$ であり, 射影 $(z_1,z_2,z_3)\to(z_1,z_2)$, $(z_1,z_2,z_3)\to$

---

[23]もちろん $\mathcal{B}^0$ の適当な基底全てに対応する項が現れている.
[24]分解定理 (命題 6) より 1 変数の場合に帰着でき, 接続係数は Drinfel'd associator で与えられる.

(z_2, z_3) は $\mathcal{M}_{0,6} \to \mathcal{M}_{0,5}$ ファイバー空間構造を与える[25]. しかし, $(z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_3)$ はファイバー空間構造を与えない[26].



従って左図の積分路に沿って 3 変数形式的 KZ 方程式の解を計算するにあたり,

$$\begin{cases} C_{3\otimes2\otimes1}: & (z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_2) \to z_1 \\ C_{3\otimes1\otimes2}: & (z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_2) \to z_2 \\ C_{1\otimes3\otimes2}: & (z_1, z_2, z_3) \to (z_2, z_3) \to z_2 \\ C_{1\otimes2\otimes3}: & (z_1, z_2, z_3) \to (z_2, z_3) \to z_3 \end{cases}$$

の 4 つはファイバー空間構造の列に沿ったものであり, 2 変数の場合と同様にして超対数関数の関数等式を得ることができる (例えば最初の積分路は無限小純組み紐 Lie 環の分解

$$\mathcal{U}(\mathfrak{X}) = \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_3, Z_{33}, Z_{23}, Z_{13}\}) \otimes \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}\}) \otimes \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}\})$$

に対応しており, 解には z_3 を主変数, $0, 1, \frac{1}{z_2}, \frac{1}{z_1 z_2}, \infty$ を特異点に持つ超対数関数と z_2 を主変数, $0, 1, \frac{1}{z_1}, \infty$ を特異点に持つ超対数関数と z_1 変数の 1 変数多重対数関数の積が現れる). しかし

$$\begin{cases} C_{2\otimes3\otimes1}: & (z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_3) \to z_1 \\ C_{2\otimes1\otimes3}: & (z_1, z_2, z_3) \to (z_1, z_3) \to z_3 \end{cases}$$

の 2 つの積分路における解はファイバー空間構造の分解には対応していない. 実際無限小純組み紐 Lie 環においても

$$\mathcal{U}(\mathfrak{X}) \neq \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_2, Z_{22}, Z_{12}, Z_{23}, Z_{13}\}) \otimes \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_1, Z_{11}\}) \otimes \mathcal{U}(\mathbf{C}\{Z_3, Z_{33}\})$$

である. しかし, これらの積分路においても対応する解を求めて何らかの関数等式を得ることはでき, 一般の超対数関数同士の調和積に相当する関数等式などが現れていると考えられる. このとき $\mathcal{U}(\mathfrak{X})$ は自由 Lie 環の展開環のテンソル積としては分解されず, それを適当な束縛条件で割った商代数に同型になる. このような場合も含めて幾何学的な意味づけ[27]を考察し, 解の分解を統合的に捉える枠組みを構築することは今後の大変興味深い研究対象となり得る.

---

[25] z_1, z_2 の満たす関係式は $z_i \neq 0, 1, \infty$, $z_1 z_2 \neq 1$ であり, (z_1, z_2) は $\mathcal{M}_{0,5}$ の立方体座標である. (z_2, z_3) も同様.
[26] $z_1 z_3 = 1$ となっても構わないため, (z_1, z_3) は $\mathcal{M}_{0,5}$ の座標になっていない.
[27] モジュライ空間の商空間とその特異ファイバーの基本群など.

参考文献

[A] V.I. Arnold, The cohomology ring of the colored braid group, Mat. Zametki **5** (1969), pp. 227-231: Math. Notes **5** (1969), pp. 138-140.

[B] F. Brown, Multiple zeta values and periods of moduli spaces $\overline{\mathfrak{M}}_{0,n}(\mathbf{R})$, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 42 (2009), no. 3, 371–489.

[C1] K.T. Chen, Iterated integrals of differential forms and loop space homology, Ann. of Math. (2) **97** (1973), 217–246.

[C2] K.T. Chen, Reduced bar constructions on de Rham complexes, Algebra, topology, and category theory (a collection of papers in honor of Samuel Eilenberg), pp. 19–32. Academic Press, New York, 1976.

[C3] K.T. Chen, Iterated path integrals, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), no.5 831–879.

[D] V.G. Drinfel'd, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with Gal($\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$), Algebra i Analiz 2 (1990), no. 4, 149–181; translation in Leningrad Math. J. **2** (1991), no. 4, 829–860.

[DT] P. Deligne and T. Terasoma, Harmonic shuffle relation for associators, preprint (2005), `http://www2.lifl.fr/mzv2005/DOC/Terasoma/lille_terasoma.pdf`.

[F] H. Furusho, Pentagon and hexagon equations, Ann. of Math. (2) 171 (2010), no. 1, 545–556.

[FH] E.R. Fadell and S.Y. Husseini, Geometry and Topology of Configuration Space, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2001.

[H] M.E. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, J. Algebra 194 (1997), no. 2, 477–495.

[I] Y. Ihara, Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations, The Grothendieck Festschrift, Vol. II, 353–373, Progr. Math., 87, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[K] 河野 俊丈, 反復積分の幾何学, シュプリンガー東京, 2007.

[OU] S. Oi and K. Ueno, The formal KZ equation on the moduli space $\mathcal{M}_{0,5}$ and the harmonic product of multiple zeta values, preprint(2009), arXiv:math.QA/0910.0718.

[R] C.Reutenauer, Free Lie Algebras, Oxford Science Publications,1993.